

Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifică relația.

b) $A^3 - A = A^2 - I_3; A^5 - A^3 = A^4 - A^2; A^7 - A^5 = A^6 - A^4; \dots, A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^{2n} - A^{2n-2}$

Prin însumare obținem: $A^{2n+1} - A = A^{2n} - I_3; A^{2n+2} - A^2 = A^{2n+1} - A \Rightarrow$

$A^{2n} - A^2 = A^{2n-1} - A \Rightarrow A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^2 - A = I_3; A^{2n+2} - A^{2n} = A^2 - I_3$

c) Demonstrăm prin inducție. Verificăm pentru $n=1, n=2$. Presupunem adevărată pentru toate valorile $\leq n-1$ și demonstrăm pentru n . Utilizând relația $A^n = A^{n-2} + A^2 - I_2$, rezultă concluzia.

2.a) $x^4 - 1 = 0$ are soluțiile complexe: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$

b) $P_3 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

c) $x^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.